# 1 Skalarprodukt, Norm, Metrik

## 1.1 Skalarprodukt

1.1.1 **Definition:**

V: VR; s: VxV $\rightarrow \mathbb{R}$; s Skalarprod. $\Leftrightarrow$

1a) $\forall\ \vec{x} \in V$: s( $\vec{x}$, $\vec{x}$ ) $\geq 0$ [positive Definitheit]

1b) s( $\vec{x}$ , $\vec{x}$ ) = 0 $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \vec{0}$

2) $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$: s ( $\vec{x}$, $\vec{y}$ ) = s ( $\vec{y}$ , $\vec{x}$ ) [Symmetrie]

3) $\forall\ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}$: s ( $\alpha\ \vec{x}_1 + \beta\ \vec{x}_2$ , $\vec{y}$ ) = $\alpha$ s ( $\vec{x}_1$, $\vec{y}$ ) + $\beta$ s ( $\vec{x}_2$, $\vec{y}$ ) [Linearität]

1.1.2 **Satz:**

s Skalarprod auf V $\Leftrightarrow$ $\exists$ symmetrische, positiv definite Matrix A:

s( $\vec{x}$, $\vec{y}$ ) = $\vec{x}^T A\ \vec{y}$

## 1.2 Norm

1.2.1 **Definition:**

Eine Abbildung $\| . \|$ : V $\rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm $\Leftrightarrow$

1a) $\forall\ \vec{x} \in V$: $\| \vec{x} \| \geq 0$ [pos. Definitheit]

1b) $\| \vec{x} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2) $\forall\ \vec{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\| \lambda\ \vec{x} \| = | \lambda |\ \| \vec{x} \|$ [Linearität der Faktoren]

3) $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$: $\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|$ [Dreiecksungleichung]

1.2.2 **typische Normen:**

1) $\forall$ s( $\vec{x}$, $\vec{y}$ ) gilt: $\| \vec{x} \| := \sqrt{(\, s( \vec{x}, \vec{y} )\, )}$ ist eine Norm

2) Betragssummennorm: $\| \vec{x} \|_1 := |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

3) Maximumsnorm: $\| \vec{x} \|_\infty := \max \{ |x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \}$

1.2.3 **Satz**:

f: V $\rightarrow$ W ; f linear ; $\| . \|$ eine Norm auf W:

$\| . \|_1 := \| f ( \vec{x} ) \|$ ist eine Norm auf V $\Leftrightarrow$ f injektiv

## 1.3 Metrik

1.3.1 **Definition:**

$X \neq \emptyset$; d: X x X $\rightarrow \mathbb{R}$; d heißt Metrik $\Leftrightarrow$

1a) $\forall$ x, y $\in$ X: d(x,y) $\geq 0$ [pos.Definitheit]

1b) d(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y

2) $\forall$ x, y $\in$ X: d(x,y) = d(y,x) [Symetrie]

3) $\forall$ x, y, z $\in$ X: d(x,y) $\leq$ d(x,z) + d(y,z)

1.3.2 **typische Metriken**

1) $\| . \|$ sei Norm auf V $\Rightarrow$ d( $\vec{x}$, $\vec{y}$ ) := $\| \vec{x} - \vec{y} \|$ ist eine Metrik auf V

1.3.3 **Satz**

X,Y $\neq \emptyset$; f: X $\rightarrow$ Y <u>bel</u>. Abbildung; d Metrik auf Y

$\rho$ (x,y) := d ( f(x) , f(y) ) ist eine Metrik auf X $\Leftrightarrow$ f injektiv