Analytische Methoden in der Materialflußplanung

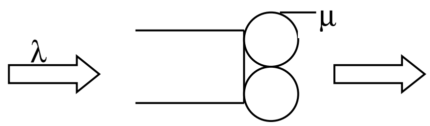
1. Einzelelemente von MF-Systemen

1.1 operationelle Analyse

Anzahl Ankünfte	A (Arrivals)
Anzahl Abgänge	C (Completions)
Summe der Aktivzeiten	B (Busy Time)
Summe der Verweilzeiten	W ("Waiting" Time, Vorsicht!)
Zugangsrate:	$\lambda = A / T$
Abgangsrate:	$X = C / T$
mittl. Bedienzeit:	$S = B / C$
Auslastung:	$U = B / T$
mittlere Verweilzeit:	$R = W / C$
mittl. Anzahl Kunden im System:	$\bar{k} = W / T \xrightarrow{imGG} \bar{k} = \lambda R$ ist Little's Gesetz der operationellen Analyse $\Rightarrow$ 1. Produktionslogist. Gesetz (Wiendahl): Bestand = Durchsatz * DLZ
Gleichgewicht	langfristig muß gelten $A = C \Rightarrow \lambda = X$

1.2 stochastische Modelle

Skizze für c=2:



Ankunftsrate:	$\lambda = 1 / E(t_{an})$
Bedienrate:	$\mu = 1 / E(t_{ab})$
Auslastung:	$\rho = \lambda / \mu$ = Aktivzeit /Gesamtzeit $\rho < 1$ für stabiles System
durchschnittl. Wartezeit:	t_W
durchschnittl. Verweilzeit:	$t_V = t_W + E(t_{ab}) = t_W + 1 / \mu$
durchschnittl. Anzahl wartender Kunden:	N_W
durchschnittl. Anzahl Kunden im System:	$N = N_W + \rho c \Leftarrow$ Herleitung aus Erwartungswert = $\sum_{k=0}^{\infty} k\ p(k)$
Little's Gesetz:	$N = \lambda t_V$ und $N_W = \lambda t_W$ $\Leftarrow$ Beweisidee: $V(t) = A(t)-C(t) \Rightarrow \lambda(t)\, t_V(t) = \frac{A(t)}{t} \frac{T_V(t)}{A(t)} = \frac{\int V(s)ds}{t} = N(t)$

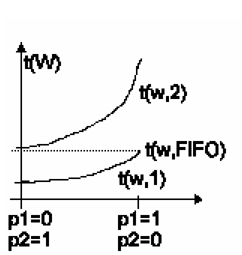
1.3 Kendall'sche Notation

A / B / m / XXXX
mit A = Ankunfts-; B = Bedienprozeß; m = Anzahl Bedienstationen; XXXX = Wartedisziplin (hier: FIFO)

Verteilungen:

M	Markov Prozeß	Exponentialverteilung: (*"gedächtnislos"*) Dichte: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ Verteilung: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ $E(t) = 1 / \lambda$; $Var(t) = 1 / \lambda^2$; $c^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ äquivalent zu Poisson Verteilung: $f(x) = ((\lambda t)^x / x!) e^{-\lambda t}$
D	Dirac Prozeß	Taktprozeß E(t) ist einzige Ausprägung der Dichte $Var(t) = 0$; $c^2 = 0$
G	General	Dichtefunktion nicht bekannt $E(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i t_i$; $Var(t) = \sum_{i=0}^{n} (t_i - E(t))^2 p_i$; $c^2 = \frac{Var(t)}{E(t)^2}$ oder $1+c^2 = \frac{E(t^2)}{E(t)^2}$ es gilt: Verschiebungssatz: $Var(t) = E(t^2) - E(t)^2$
Gi	General independent	Ankunfts- und Abgangsprozesse sind unabhängig

1.4 Materialflußsysteme

M / M / 1	aus Markovkette & statischem GG $\Rightarrow p(k) = \rho^k (1-\rho)$ $\Rightarrow N = \frac{r}{1-r}$
M / G / 1 ohne Priorität	ohne Priorität: $t_W = \rho\, r + N_W E(t_{ab})$ $\Rightarrow t_W = \rho\, r / (1-\rho)$ mit $r = ½ E(t_{ab}^2)/E(t_{ab})$ (aus graph. Herleitung der Restbedienzeit mit Grenzübergang n à ∞) $\Rightarrow t_W = \frac{r}{1-r} \frac{E(t_{ab}^2)}{2E(t_{ab})} = \frac{r\ E(t_{ab})(1+c_{ab}^2)}{2(1-r)}$ Formel von *Pollazek-Khintchine* und $N_W = N_W^{M/M/1} \cdot \frac{1+c_{ab}^2}{2}$
M / G / 1 mit eingeschr. Priorität	mit eingeschränkter Priorität: eingeschränkte ≈ nicht unterbrechende Prioritäten (non-preemptive) Def.: Arbeitserhaltung := Kunde zu Anteil α abgearbeitet $\Rightarrow$ Restbedienzeit: $(1-\alpha)\, t_{ab}$ **Kleinrock's Erhaltungssatz**: falls priorisierte Kunden keine systematisch größere oder kleinere Bedienzeit haben $\Rightarrow$ Summe der Wartezeiten bleibt gleich: $E(V_{Warten}) = \sum \rho_i t_w^i = \rho\, t_W^{FIFO}$ [Herleitung über graphische Betrachtung (Rechteck + Dreieck im V – t – Diagramm) [anschl. berechne E(V) mit Hilfe von Little wobei V = Virtual Work Wartezeit für Klasse k: $t_W^k = \frac{l\ E(t_{ab}^2)}{2\,(1-\sum_{i<k} r_i)(-\sum_{i\leq k} r_i)}$ [Klasse 1: $t_W^1 = \rho 1\ tW1 + \lambda\ E(tab)/2$ [Klasse 2: t_W^2 = Restbedienzeit aktueller Kunden + Bedienzeiten Kunden Klasse 1,2 + Bedienzeiten aller während Wartezeit eintreffender Kunden Kl. 1 (Expansionsfaktor: $1/(1-\rho)$) 

M / G / 1 mit absoluter Priorität	mit absoluter Priorität: absolute ≈ unterbrechende Prioritäten (preemptive) → i.d.R. *nicht arbeitserhaltend* jedoch hier: Annahme der Arbeitserhaltung Klasse 1: $t_W^1 = \dfrac{\lambda_1 E(t_{ab,1}^2)}{2(1-\rho_1)}$ (abh. von λ_1 und $t_{ab,1}$) Klasse 2: $t_W^2 = t_W^{2,\text{nicht unterbr. Prio}}$, $t_V^2 = t_W^2 + t_K^2$ mit $t_K^2 = \dfrac{E(t_{ab,2})}{1-\rho_1}$ ⇒ Anwendung zur Modellierung von Störungen
M / M / c	jetzt gilt: $\rho = \lambda / c\mu < 1$ Herleitung mit Markovkette ⇒ GG ⇒ $p(0) = \dfrac{(c\rho)^c}{(1-\rho)c!} + \sum_{j=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^j}{j!}$ anschl.Erwartungswert bilden ⇒ $N_W = \dfrac{p(0)}{c!} \dfrac{(c\rho)^c \rho}{(1-\rho)^2}$ Rest mit Little und $N = N_W + c\rho$
M / G / c	Approximation durch Analogieschluß $t_W^{M/G/c} \approx t_W^{M/M/c} \cdot \dfrac{1+c_{ab}^2}{2}$ Vorsicht: Näherung nur gut bei kleinem oder großem ρ
G_i / G / 1	T_N = ZAZ nach Kunde n $T_{ab,n}$ = Abgangszeit Kunde n $X_n = T_{ab,n} - T_n$ = Differenz zu- zu abgehender Arbeit $T_{W,n}$ = Wartezeit Kunde n $Y_n = \lvert T_{W,n} + X_n \rvert_-$ = Brachzeit $\lvert ... \rvert_-$ ist negativer Anteil vom Betrag, sonst 0 $T_{W,n+1} = \lvert T_{W,n} + X_n \rvert_+$ ⇒ $T_{W,n+1} - Y_n = T_{W,n} + X_n$ [⇒ $Y_n T_{W,n+1} = 0$] (mit n → ∞) ⇒ $E(Y_\infty) = -E(X)$ (Quadrieren) ⇒ $\mathbf{t_W} = \dfrac{-E(X^2)}{2E(X)} - \dfrac{E(Y_\infty^2)}{2E(Y_\infty)}$ [E(X) oder $E(Y_\infty)$ sind unbekannt!] Abschätzungen: • *Kingman's Upperbound*: $E(Y^2) \geq E(Y)^2$ ⇒ $t_W = \dfrac{c_{an}^2 + \rho^2 c_{ab}^2}{2\lambda(1-\rho)}$ • *Daley's Upperbound* • *Näherung von Marchall* • *Näherung von Krämer & Langenbach-Belz* (beste Näherung, Fallunterscheidung)

1.5 Variabilität des Abgangsprozesses:

Zwischenabgangszeiten	$D_n = Y_n + T_{ab,n}$ (Erwartungswert) ⇒ $E(D) = E(Y_\infty) + E(Tab) = 1/\lambda$ ($=E(T_{an})$)
für M/G/1	$c_D^2 = 1 + \rho^2 (c_{ab}^2 - 1)$
für M/M/1	$c_D^2 = 1$
für G/G/1	Näherung, basiert auf Abschätzung von t_W z.B. $c_D^2 \approx 1 + (1-\rho^2)(c_{an}^2 - 1) + (\rho_i / m_i)(c_{ab}^2 - 1)$ (s.u.)

2. Bediensystemnetzwerke (BSN)

Bediensysteme, i=0: Netzwerkumgebung	i=1, ... , M
Übergangswahrscheinlichkeit	$q_{ij} = \dfrac{\lambda_{ij}}{\sum_{j=0}^{M} \lambda_{ij}}$
$\Rightarrow$ Übergangsmatrix	$Q = (q_{ij})$

2.1 offene Bediensystemnetzwerke

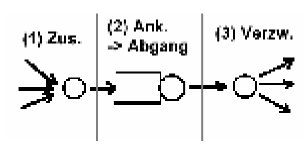
LGS: aus GG ergibt sich:	$\forall j$: $\lambda_j = \lambda_{0j} + \sum_i \lambda_{ij}$ mit $\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}$ $\Rightarrow \lambda = (Q^T - E)^{-1} (-\lambda_0)$ mit $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_M)^T$

2.2 offene exponentielle Bediensystemnetzwerke (FCFS)

Zustandsvektor	$\vec{k} = (k_1, ..., k_M)^T$ mit k_i = Anzahl der Kunden im BS i
<u>globale Gleichgewichtsgleichungen (GGG)</u>	Wahrscheinlichkeitsfluß in Zustand hinein =! Wahrscheinlichkeitsfluß aus Zustand heraus → zu komplex, nicht lösbar

<u>lokale GGG</u>	Freischneiden der Zustände: $\forall BS_i$: Abgang aus i =! Zugang in i
	Vorteil: Lösung analog M/M/c möglich durch:
	$\Rightarrow$ **<u>Produktformlösung nach Jackson</u>**
	$p(k_1, ..., k_M)^T = p_1(k_1)\ p_2(k_2) ... p_M(k_M)$
	mit Eigenschaften:
	• $\forall i$ mit $\rho_i < 1$: lokale GGG sind immer lösbar
	• Lösung der lokalen GGG ist auch Lösung der globalen GGG
	<u>Geltungsbereich</u> (nach <u>BCMP</u>: Beskett, Chomdy, Munz, Palacios):
	• *Abfertigungsdisziplin*: FCFS, LCFS, (PS = processor sharing)
	• *Bedienzeitverteilung*:
	  • bei FCFS: exponentialverteilte Prozesse
	  • sonst: beinahe beliebig
	$\Rightarrow$ selten bei realen MF Systemen $\Rightarrow$ meist keine exakten Lösungen

2.3 offene Bediensystemnetzwerke mit generellen Zeiten



<u>Approximation über Freischneiden:</u>

Beeinflussung nur über Mittelwert und Variabilität der Flüsse

Mittelwert: λ	$\lambda_j = \sum_i \lambda_{ij}$
Variabilität: c²	<u>(1) Zusammenführen der Ankunftsströme:</u> mittels Approximationen: • <u>asymptotische Methode</u>: $c_{an,j}^2 = \sum_i (\lambda_{ij} / \lambda_j)\, c_{D,i}^2$ (systematische Unterschätzung) • <u>stationäre Methode</u> (systematische Überschätzung) <u>(2) Transformation des Ankunfts- in den Abgangsprozeß:</u> durch Approximation und Linearisierung: $c_{D,i}^2 \approx 1 + (1 - \rho_i^2)(c_{an,i}^2 - 1) + (\rho_i / m_i)(c_{ab,i}^2 - 1)$ <u>(3) Aufteilung des Stromes</u> (exakt): $c_{D,ij}^2 = q_{ij}(c_{an,i}^2 - 1) + 1$ <u>(4) aus (1) und (3) folgt:</u> $\Rightarrow c_{an,i}^2 = \dfrac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \lambda_j q_{ji} [q_{ji} c_{D,j}^2 + 1 - q_{ji}] + \dfrac{\lambda_{0i}}{\lambda_i} \left[\dfrac{\lambda_{0i}}{\lambda_0} c_{an,0i}^2 + 1 - \dfrac{\lambda_{0i}}{\lambda_0} \right]$

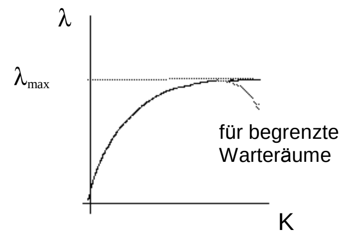
QNA	<u>Vorgehensweise</u>: 1. Löse Flußgleichungen $\Rightarrow \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_M)^T$ 2. Bestimme ρ_i 3. Gleichung (2) und (4) lösen $\Rightarrow c_{D,i}^2$ und $c_{an,i}^2$ oder (1),(2),(3) sukzessive ermitteln 4. Berechne Kennwerte für Bediensystem $BS_i \Rightarrow t_W$, N, u.a. Hinw.: bei Rückführung: μ und λ verringern (ρ konst.) und ohne Rückkopplung rechnen!

2.4 Werkstattfertigung als offenes Bediensystemnetzwerk

Kunde	= Weitergabeeinheit z.B. Los l = 1,...m
Vorgehensweise	1. Löse Flußgleichungen $\lambda_i = \sum \lambda_i^l$ 2. $t_{ab,i}^l = p_{Rüst,i}^l\, t_{Rüst,i}^l + t_{Stück,i}^l\, L^l$ mit L^l = Losgröße Los l, $p_{Rüst,i}^l = 1 - (\lambda_i^l / \lambda_i)^2$ 3. Mittelwerte der Bearbeitungszeit ($\Rightarrow \mu$, c_{ab}^2): $E(t_{ab,i}) = \sum_l t_{ab,i}^l \lambda_i^l / \lambda_i$ und analog $E(t_{ab,i}^2)$ $\Rightarrow$ anschl. als QNA lösen

2.5 geschlossene Bediensystemnetzwerke mit exponentialverteilten Zeiten

Kunden	K: endliche, feste Zahl Kunden im BSN im Umlauf (Kunde z.B. FTS)
<u>Produktformlsgen</u>	(aus globalen GGG): $p(k) = 1/G(K) \prod F_i(k_i)$
Vorgehensweise	1. Besuchshäufigkeiten: $e_j = \sum q_{ij}\, e_i$ $\Rightarrow$ M-1 unabhängige Gleichungen, zusätzlich setze z.B. $e_1 = 1$ 2. Bestimme für alle j, k_j : $F_j(k_j) = \left(\frac{e_j}{m_j}\right)^{k_j}$ (Hinw.: Formel nur für Einkanalsystem!) [Beweisidee: Elimination von allen von k_i unabh. Faktoren: [a) $\lambda^{k1}\, \lambda^{k2 \ldots}$ und b) $(1-\lambda e_1/\mu_1)\, (1-\lambda e_2/\mu_2)^{\ldots}$ 3. Normalisierungskonstante: $G(K) = \sum_{\sum_j k_j = K} \prod_j F_j(k_j)$ 4. Zustandswahrscheinlichkeit der Netzwerkzustände: $p(k) = 1/G(K) \prod F_i(k_i)$ 5. Zustandswahrscheinlichkeit einzelner BS: $p_j(k=n) = \sum_{\substack{k_j = n \\ \sum k_j = K}} p(k)$ (Randwahrscheinlichkeiten) $\Rightarrow$ Rechenaufwand! Anzahl Zustände $Z = \binom{K+M-1}{M-1}$ $\Rightarrow$ Ungenauigkeit (sehr kleine Wahrscheinlichkeiten)

MWA	<u>Vor.:</u> Little und Ankunftszeittheorem Schritte für Einkanalsystem: 1. Besuchshäufigkeiten e_i bestimmen (s.o.) 2. Initialisiere $N_i(0) = 0$ 3. Iteration k = 1,...,K 3.1 $t_{v,i} = \frac{1}{m_i} [\, 1 + N_i(k-1) \,]$ 3.2 $\lambda(k) = \frac{k}{\sum_i e_i \, t_{v,i}(k)}$ 3.3 $\lambda_i(k) = \lambda(k)\, e_i$ 3.4 $N_i(k) = \lambda_i(k)\, t_{v,i}(k)$ 4. Kenngrößen ρ_i, $t_{w,i}$, ... berechnen 

2.6 geschlossene BSN mit generellen Zeiten

Antwortzeit- erhaltung	<u>Vor.:</u> - ZAZ immer exponentialverteilt - Mikrosicht (einzelne BS) ↔ Makrosicht (BSN) - Einkanalsysteme Schritte: 1. λ^{alt}, λ_i^{alt} mittels MWA schätzen 2. $t_{v,i}^{M/G/1} = \frac{r_i}{1-r_i} \, \frac{E(t_{ab,i}^2)}{E(t_{ab,i})}$ für alle i bestimmen 3. $\mu_i' = \frac{1+l_i \; t_{v,i}^{M/G/1}}{t_{v,i}^{M/G/1}}$ bestimmen (Hinw.: Formel aus $t_{v,i}^{M/G/1} = t_{v,i}^{M/M/1}$ 4. λ^{neu} , λ_i^{neu} nach MWA schätzen mit neuem μ_i' 5. Falls $\vert \lambda^{alt} - \lambda^{neu} \vert \geq \varepsilon$ THEN GOTO 2 ⇒ schlechte Ergebnisse für kleines K, wegen Ann. der Markovprozesse ⇒ Übertragbar auf M/G/c bzw. G/G/c durch bekannten Analogieschluß (s.o.)

Viel Erfolg!